МУНИЦИПАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ЛИЦЕЙ № 104 Г. МИНЕРАЛЬНЫЕ ВОДЫ
ИНН 2630027809 ОГРН 1022601453060
357203, Россия, Ставропольский край, г. Минеральные Воды, ул. Ленина, 36

75

М10-8

Олимпиадная работа
школьного этапа всероссийской олимпиады школьников
по математике
обучающегося 10 Б класса

МБОУ лицей № 104
наименование образовательного учреждения

Крылова Артёма Вадимовича
ФИО участника

Педагог-наставник:
Воробьёва В. А

Пред Воробьева В.А
Члены Аванесян Р.В.
Крюкова Г.А.

1	2	3	4	5
20	10	20	20	5

«22» сентября 2020 г.

M10-8

№ 4.

Разложим на множители многочлен:

$n^6+2n^5-n^2-2n = n(n^5+2n^4-n-2) = n((n+2)n^4-(n+2)) =$

$= n(n+2)(n^4-1) = n(n^2+1)(n^2-1)(n+2) = n(n+2)(n^2+1)(n-1)(n+1) =$

$= (n-1)n(n+1)(n+2)(n^2+1).$

Из записи следует, что при $n = 1; 0; -1; -2$ выражение обр. в 0, откуда $\vdots\ 120$. ($n^2+1 \neq 0$; $n^2 \neq -1$ для чисел $\in R$)

Рассмотрим все отдельные случаи. ($n \in Z$ − по усл.).

а) $(n-1)n(n+1)$ делится на 3 („одно и только одно кратно n среди n посл. нат. чисел для любого $n \in N$"). Откуда и всё произв. делится на 3.

б) Зн. многочлена делится на 8. Докажем. Дело в том, что в него вх. $n(n+2)$. По св. делимости на 4:

$n \vdots 4 \Rightarrow n+2 \not\vdots\ 4$. (справедливо для чётных n).

$n\,\cancel{+2} \not\vdots\ 4 \Leftrightarrow n+2 \vdots 4$ (по св. делимости на 4).

В числе, что $\not\vdots\ 4$, двойка присут. в ст. 1, $\vdots\ 4$ − хотя бы 2, в произведении − в ст., откуда $\underline{\vdots\ 8}$.

Впрочем, это работает лишь для чётных n. Для нечётных <u>аналогично</u> делимость на 8 доказывается через скобку: $(n-1)(n+1)$, опять числа, отл. на 2, в одном ст. 1, в другом − 2 и выше, в пр − 3 и выше, т. е $\vdots\ 8$.

в) значение делится на 5. Рассмотрим в таблице всевозм. ост. n при дел. на 5 и докажем это.

№ 2.

М10-8

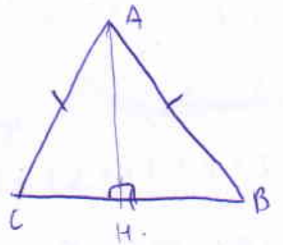
Дано:

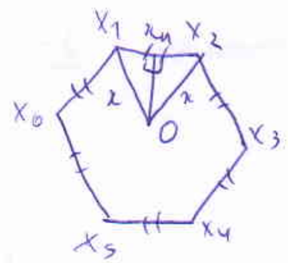
ABC – прав. треуг.

$X_1X_2X_3X_4X_5X_6$ – прав шестиуг.; $S_{ABC} = S_{X_1X_2X_3X_4X_5X_6}$.

Найти: $\frac{S_{ABC}}{S_{X_1X_2X_3X_4X_5X_6}}$ (можно поменять мест. числ. и знам.).

Решение:





Обозначим $2x$ ед. – сторона треугольника. Тогда P_Δ: $2x \cdot 3 = 6x$; ст. ⬡ – x (т.к. $6x$ сполвится и P шестиуг. по условию; $\frac{6x}{\cancel{6}} = 6x$).

Итак, $2x$ – ст. Δ; x – ст. ⬡.

Для пр. Δ по его св-вам справедливо: (Ah – выс.).

$$S = BC \cdot Ah = BC \cdot AC \cdot \frac{Ah}{AC} = BC \cdot BC \cdot \sin\angle C = (2x)^2 \cdot \sin 60° =$$

($AC \neq 0$) (прав.)

$= \underline{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4x^2 = 2\sqrt{3}x^2}$. Обозначим O – центр впис. шестиуг. $OX_1 = OX_2 = OX_3 = \ldots = x$ по св. ⬡ (правильного шестиугольн.). У него R описанной окр = стороне = x. Т.к. x – радиус опис. окр; X_1X_2O – равност. Δ со ст. $\underline{x}$. Пусть Oh – выс. к X_1X_2. Тогда по св. Δ:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$$ (формула площади через синус: $x \cdot x \cdot \sin 60°^* = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$).

М10-8

№5.

Заметим, что $x = 1$ подходит:

$x(x+2)(x+3)(x+5) = 72$

$1\,\overset{3}{(1+2)}\,\overset{4}{(1+3)}\,\overset{6}{(1+5)} = \overset{12}{3\cdot 4}\cdot 6 = 72$.

Подставим $x = -6$:

$-6\,\overset{-4}{(-6+2)}\,\overset{-3}{(-6+3)}\,\overset{-1}{(-6+5)} = 72.$

$\overset{24}{6\cdot 4}\cdot\overset{72}{3}\cdot 1 = 72$, т.е. -6 — подходит.

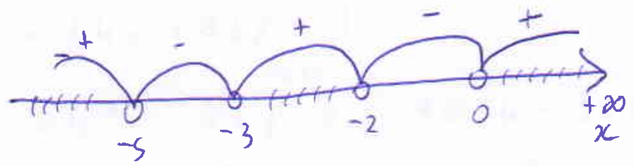
Решим след. неравенство:

$x(x+2)(x+3)(x+5) > 0.$

Нули $f(x) = x(x+2)(x+3)(x+5)$:

$x = 0$; $x = -2$; $x = -3$; $x = -5$.

т.к. нет квадрата, чередуют. знаки (метод. инт.).



Значит $(72 > 0)$, $x_0 \in (-\infty; -5) \cup (-3; -2) \cup (0; +\infty)$. ($x_0$ — корень).

$x(x+2)(x+3)(x+5) = 72$

$(x^2+2x)(x^2+8x+15) = 72$

$x^4 + 8x^3 + 15x^2 + 2x^3 + 16x^2 + 30x - 72 = 0$.

$x^4 + 10x^3 + 31x^2 + 30x - 72 = 0$.

$x^4 + 10x^3 + 30x^2 + 300x + x^2 - 72 - 270x = 0$

$\cancel{x^3(x+10) + 30x(x+10) + x^2 - 270x - 72 = 0.}$

$x(x+5)\cdot(x+2)(x+3)$

$(x^2+5x)\cdot(x^2+5x+6) = 72.$

5

М10-8

№3.

~~Пусть~~ ...

Пусть x об. – количество обезьян. ($x \in N$; x об.). Тогда есть 2 группы: во второй 12 об. (в группе), в первой группе $(\frac{1}{8}x)^2$ – "часть восьмая в квадрате". Зная, что обезьяны есть только из двух групп, их всего x об., получим уравнение:

$$\left(\frac{1}{8}x\right)^2 + 12 = x.$$

$$\frac{1}{64}x^2 + 12 = x \quad | \cdot 64$$

$$x^2 + 768 = x \cdot 64$$

$$x^2 - 64x + 768 = 0$$

$$D = 64^2 - 768 \cdot 4 = 4096 - 3072 = 1024 > 0; \text{ 2 р.к.}$$

По т. Виета: $\begin{cases} x_1 x_2 = 768 \\ x_1 + x_2 = 64. \end{cases}$

$x = 48; 16.$ $(48 \cdot 16 = 16^2 \cdot 3 = 768;\ 48 + 16 = 64).$

Оба значения натуральны, оба подх.

Проверим на практике:

1. Первый случай: 16 обезьян – это 12 обезьян и $\left(16 \cdot \frac{1}{8}\right)^2 = 4$ обезьяны; $12 + 4 = 16$ об..

2. Второй случай. 48 об. – это 12 об. и $\left(48 \cdot \frac{1}{8}\right)^2 = 36$ об.; $12 + 36 = 48$, (подходит).

Итак, возможны 2 ответа:

Ответ: 16 обезьян <u>или</u> 48 обезьян.

20б

Замена: М10-8 №5 – Важное!

$y = x_1 + 2,5$. (x_1 - это из усл.)

$x_1 = y - 2,5$.

$(y-2,5)(y-0,5)(y+0,5)(y+2,5) = 72$.

$(y^2 - 0,25)(y^2 - 6,25) = 72$.

$y^4 - 6,25y^2 - 0,25y^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{25}{4} = 72$. ($\frac{25}{16}$)

$y^4 - 6,5y^2 + \frac{25}{16} = 72$.

$x = y^2$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

$x^2 - 6,5x + \frac{25}{16} = 72$.

$D = 42,25 - \frac{25}{4} = 36 = 6^2 > 0$; 2 р.к.

$x_{1,2} = \frac{6,5 \pm 6}{2}$.

$x_{1,2} = \frac{12,5}{2}; \frac{0,5}{2}$

$6,25; 0,25$.

$y = \pm\sqrt{6,25}; \pm\sqrt{0,25}$

$y = -2,5; -0,5; 0,5; 2,5$.

Это от. y: $-2,5 = x_1 + 2,5$

x ~~...~~ Ответ: -5; 1 и ещё $x_1 = -5$.; $x_3 = -2,5$.

x ...

~~$y = x - 2,5 \; ; \; x = y + 2,5$~~

M10-8

$y = x + 2,5; \quad x = y - 2,5.$

$(y-2,5)(y-0,5)(y+0,5)(y+2,5) = 72.$

$(y^2 - 6,25)(y^2 + 0,25) = 72.$

$y^4 - 6,5y^2 + \frac{25}{16} \; \frac{-288}{4 \cdot 6} = 0.$

1982.

$y^4 - 6,5y^2 + \frac{\quad}{16}$

М10-8

n	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$	n^2+1
0	4	0	1	2	1
1	0	1	2	3	2
2	1	2	3	4	0 (5)
3	2	3	4	0	0 (10)
4	3	4	0	1	2 (17)

(mod 5) – сравн. по модулю 5.

Заметим, что в каждой строке есть число, ⋮ 5 (ср. (0 по mod 5). Значит, в любом сл. значение ⋮ 5.

Из кратности: ⋮ 3; ⋮ 5; ⋮ 8 по св-ву НОК следует, что зн. многочлена кратно 120 (НОК (3; 5; 8) = 120), ч.т.д.

№ 1.

20

Было: 100 г; 30% HCl.

Стало: ? ↓ добавили ? г только воды.

? г; 10% HCl

Решение.

1. $100 \cdot 30\% = 100 \cdot 0{,}3 = 30$ г – HCl в растворе было.
2. Т.к. добавляли лишь воду, 30 г в растворе стало.
3. 30 г – 10% от раствора (по усл.). Откуда 100%:
4. $30\text{ г} : \frac{1}{10\%} = 30\text{ г} \cdot \frac{1}{0{,}1} = 30\text{ г} \cdot 10 = 300\text{ г}$ – стала масса раствора.
5. $300\text{ г} - 100\text{ г} = 200\text{ г}$ – добавили.

Ответ: 200 г.

20

№ 3.

M10-8

1. Утверждение: $x = 1$ – единственное, уравн. в промежутке $(0; +\infty)$.

Док-во. Пусть $x_0 = 1 + a$; $a \neq 0$. (т.к. x_0 – предп. другой корень). Имеем:

$(1+a)(3+a)(4+a)(6+a)$. Видим следующее:

1. Если $a > 0$, то кажд. мн. увелич. Т.к. все мн. $> 1 > 0$, увеличится и произведение. (Из $a > c$, $b > d$ для неотриц.: $ab > cd$) a, b, c, d – неотр.

2. Аналогично, использовав b, d: при $a < 0$ зн. уменьш. (Из интервала $a > -1$, т.к. интервал для x_0: $(0; +\infty)$)

3. Далее, доказав, что $x = -6$ – ед. корень в своем интервале $(-\infty; -6)$.

$x_0 = -6 + a$ (см. выше: $a \neq 0$, x_0 – предп. корень, отл. от -6)

$(-6+a)(-\cancel{8}4+a)(-3+a)(-1+a) = 0$

$(-6+a)(-4+a)(-3+a)(-1+a) = 0$.

Если $a > 0$, то из увел. модуля кажд. из мн. сл. увел. модуля произв, а знак „+", поэтому др. будет увеличение. (на промежутке $a \in (-\infty; -1)$).

$a < 0 \Rightarrow$ уменьшение, т.к. из промежутк. $a \in (-\infty; 1)$, поэтому новых корней не будет (по св. a, b, c, d неотр. $a > b$; $c > d \Rightarrow ac > bd$).

Осталось рассм. промежуток $(-3; -2)$.

Могут ли быть решения в $(-3; -2)$?. В этой пол целых чисел.

М10-8

$$x(x+2)(x+3)(x+5)=72.$$

$$(x^2+2x)(x^2+8x+15)=72.$$

$$x^4+10x^3+31x^2+30x-72=0.$$

$$x^4+6x^3+9x^2+4x^3+22x^2+30x-72=0.$$

$$\underline{x^4}-\underline{4x^3}+14x^3+\underline{6x^2}+25x^2\underline{-4x}+34x+\underline{1}-73=0$$

$$(x-2)^4=x^4-8x^3+24x^2-32x+16.$$

$$(x-2,5)^4=x^4-10x^3+(2,5)^2\cdot 6x^2$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^4=x^4+10x^3+\frac{25}{4}\cdot 6x^2+\frac{125}{8}\cdot 4x+\frac{625}{8}$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^4-6,5x^2+22,5x-72=0.$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^4-0,1(65x^2-225x-720)=0.$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^4-0,5(13x^2-41x-144)=0.$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^4-6,5\left(x^2-\frac{41}{13}x-\frac{144}{13}\right)=0.$$

$$\left(x^2+\frac{32,5}{13}x-\frac{78,5}{5}x\right.$$

$$(x^2+2x)(x^2+8x+15)=72$$

$$x^2+8x+15=0.$$

$$D=64-15\cdot 4=4=2^2>0;\ 2\ к.$$

$$x_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{D}}{2a};\quad x_{1,2}=\frac{-8\pm 2}{2}$$

$$(x^2+2x)(x+5)(x+3)=72 \qquad x_{1,2}=-5;\ -3.$$

M10-8

* используя: $\sin 60°$. Докажем, что $60° \cdot \angle X_1OX_2 = 60°$, ведь прав. шестиуг. вписан в окр. с центром в O и симметричен, всего 6 углов от центра: X_1OX_2; X_2OX_3; ... Т.к. ΔX_1OX_2 – прав, все углы по $60°$.

По форм. площади:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 = X_1X_2 \cdot OH \cdot \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{3}x^2 = X_1X_2 \cdot OH.$$

$$\sqrt{3}x^2 = x \cdot OH.$$

$$\boxed{OH} = \frac{\sqrt{3}x^2}{x} = \sqrt{3}x \quad (X \text{ не равен } 0).$$

По св. прав. шестиугольника OH – радиус впис. окружности шестиуг.

По формуле для нах. площади умн. периметр. на радиус впис. окр и :2. (у любого правильного многоугольника).

$$6x \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}x = \underline{3\sqrt{3}x^2}.$$

Получили: $3\sqrt{3}x^2$ у шестиуг; $2\sqrt{3}x^2$ у треуг.

$$\frac{3\sqrt{3}x^2}{2\sqrt{3}x^2} = 1,5 \ (x \neq 0), \text{ или } \frac{2\sqrt{3}x^2}{3\sqrt{3}x^2} = \frac{2}{3} \ (x \neq 0).$$

(шестиуг : треуг.)

(треуг : шестиуг.)

10

Ответ: 1,5 (делим S шестиуг. на S_Δ); $\frac{2}{3}$ (S_Δ на $S_{шестиуг.}$) (отличается перест. делителя и знаменателя).

$x(x+2)(x+3)(x+5)=72.$

М10-8

$(x^2+2x)(x+3)(x+5)=72.$

$(x^2+2x)(x^2+8x+15)=72.$

$x^4+8x^3+15x^2+2x^3+16x^2+30x=72.$

$\underline{x^4+10x^3+31x^2+30x-72=0}.$

$x^4+10x^3+31x^2+30x+9-81=0.$

$x^2(x^2+31)+10x(x^2+31)-900x-72=0.$

$\cancel{x^2 0(x^3+}$

$x^3(x+10)+31x^2+310x-280x-72=0.$

$x^3(x+10)+31x(x+10)-280x-72.$

$x^3(x+10)+31x(x+10)-280x-280+208=0$

$-28(x+10)$

$(x^3+31x-28)(x+10)+208=0.$

Предположение на промежутке $(-3;-2)$ – нет решений, потому что в „вершине" $-2,5$ (нет фун-ва) значение:

$-2,5\cdot(-0,5)\cdot 0,5\cdot(2,5)=\underline{6,25}\ \frac{}{4}<72.$

Заметим производную:

$4x^3+30x^2+62x+30=0.$

$4(-2,5)^3+30(-2,5)^2+62(-2,5)+30.$

$4\cdot\frac{125}{2}\ \frac{125}{8}+30\cdot\frac{500}{2}\ \frac{375}{2}\ 25+62\cdot\frac{810}{2}\ \frac{310}{2}\ \frac{5}{2}+30=\frac{870}{2}>0,$ не. подх.